

文章编号: 1000-8055(2003) 06-0794-05

锥形液膜空间稳定性分析

岳 明, 杨茂林

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘要: 对离心喷嘴喷出的锥形液膜做了空间不稳定性分析, 导出了锥形液膜的色散方程, 并对色散方程进行了数值求解和分析研究。研究结果表明, 在液膜表面存在着对称扰动波和反对称扰动波。对于对称扰动波, 液膜半锥角的增大使得液膜的不稳定范围和波增长率缩小, 并且将扰动波的主波向长波的方向移动。而反对称扰动波既有类似于对称扰动波的变化规律, 又有其自身的特点。仅考虑液膜曲率半径的变化时, 半锥角的增大使得波增长率的减小趋缓。而同时考虑曲率半径和液膜形状的变化时, 液膜的波增长率出现了两个局部峰值。这两个峰值分别对应长短不同的两个波长, 并且短波的稳定范围和增长率均远小于长波。这说明锥形液膜的破碎受到两种长短不同的扰动波的共同影响, 且在短波的影响下液膜更易破碎。

关键词: 航空、航天推进系统; 锥形液膜; 空间稳定性; 色散方程; 扰动波

中图分类号: V 233. 2* 2

文献标识码: A

On the Spatial Instability of a Conical Sheet

YUE Ming, YANG Mao-lin

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A temporal instability analysis of a conical sheet is carried out. A dispersion relation of a conical sheet for both axisymmetrical and antisymmetrical disturbances is presented. The dispersion relation has been solved numerically and typical results are given. For both axisymmetrical and antisymmetrical disturbances, the increase in sheet cone half-angle reduces the wave growth rate and the range of instability, and shifts the dominant wave of the disturbances to a longer wavelength. For antisymmetrical disturbances, the sheet cone half-angle inhibits the reduction of the growth rate, and two local maxima of the growth rate exist in this case. The two maximum growth rates correspond to waves with different wavelengths, and the growth rate and the range of instability of the short wavelength wave are much less than that of the long one. It is shown that both long and short wavelength waves affect the breakup of the conical sheet, and sheet is easy to breakup under the effect of short wavelength wave.

Key words: aerospace propulsion system; conical sheet; temporal instability; dispersion relation; disturbance

离心式压力雾化喷嘴已广泛应用于燃气轮机、工业窑炉、农用喷雾器以及直射式汽车发动机。即便是在航空发动机上, 也有不少是采用压力雾化喷嘴配单或双旋流器的组合式气动雾化喷

嘴。研究压力雾化喷嘴的雾化机理, 预测喷嘴的雾化特性, 对于设计性能优越的喷嘴具有极其重要的意义。利用线性或非线性理论对液膜做空间不稳定性分析, 探索液膜破碎雾化的规律, 是喷嘴雾

化机理研究中一个十分重要的方面。

数十年来对液膜空间不稳定性的研究已有了许多卓有成效的成果。早在上个世纪50年代, Squire^[1]以及 Hagerty 和 Shea^[2]便研究了平面无粘液膜上 Kelvin-Helmholtz 波的增长率。随后 1975年 Crapper, Dombrowski 和 Pyott^[3]推导了描述无粘环形液膜上 Kelvin-Helmholtz 波增长率的四阶色散方程。Sterling 和 Sleicher^[4]则研究了毛细管射流的不稳定性。到80年代末期, 研究又有了新的进展。Frankel 和 Weihs^[5]研究了液膜形状的改变对液膜稳定性的影响。Rangel 和 Sirignano^[6]对液膜做了非线性稳定性分析。Li 和 Tankin^[7]等人分析了粘性液膜空间不稳定性。不过这些研究绝大部分针对的是平面液膜^[1, 2, 6, 7]和毛细管射流^[4, 5], 或者是环形液膜^[3], 而对于压力雾化喷嘴喷出的中空锥形液膜的空间稳定性研究目前还十分欠缺。本文将针对锥形液膜应用线性稳定性理论做初步的分析研究。

1 锥形液膜色散方程

1.1 色散方程推导

锥形液膜由于其液膜形状, 即液膜半径和厚度, 随空间改变, 依此写出的运动方程将十分复杂, 难以在数学上求解。因此, 本文在推导色散方程时仅考虑锥形液膜在液面曲率半径上同环形液膜的差别, 液膜形状变化的影响将随后通过液膜变化关系式引入。于是锥形液膜的色散方程可利用类似于环形液膜的方法^[3]来推导。

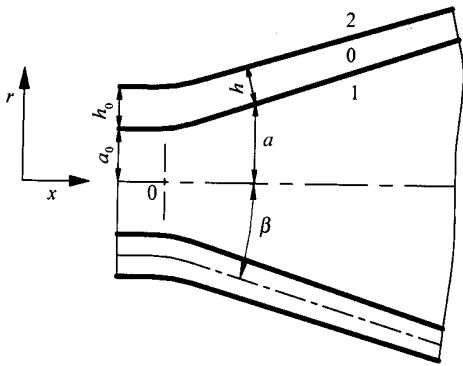


图1 锥形液膜简图
Fig. 1 Sketch of conical sheet

设锥形液膜稳态流速为 V , 半锥角为 β , 忽略内外表面半锥角的变化及出口段, 定 O 点为原点。液膜中心半径为 a , 厚度为 h , 如图1。液膜和周围气体密度分别为 ρ_l 和 ρ_g 。按照常规处理^[3], 液

膜内外表面的扰动波定义如下:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= R\eta_{1,0}\exp[i(kx - \bar{\omega}t)] \\ \eta_2 &= R\eta_{2,0}\exp[i(kx - \bar{\omega}t)] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, η 为扰动波振幅, 下标1、2分别代表液膜内、外表面, 下标0表示初始; $k = 2\pi/\lambda$ 为扰动波波数, 式中 λ 为波长; $\bar{\omega} = \bar{\omega} + i\bar{\omega}$ 为波的复数增长率, 当增长率 $\bar{\omega}$ 达到最大值时扰动波处于最不稳定状态, 一般破碎理论^[8]认为此时液膜破碎。

假设液膜及周围空气的流动是无粘无旋的, 于是液膜和空气的运动可以用拉普拉斯方程来描述:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad i = 1, 0, 2 \quad (2)$$

这里0代表液膜, 1、2分别代表液膜内、外表面的空气; Φ 为速度势函数。在极坐标系下三个区域的速度势函数可分别设为:

$$\Phi = RG_i(r) \exp[i(kx - \bar{\omega}t)] \quad (i = 1, 0, 2) \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)。解之, 得如下通解:

$$\begin{aligned} G_i(r) &= A_i I_0(kr) + B_i K_0(kr) \\ (i &= 1, 0, 2) \end{aligned} \quad (4)$$

式中: I_0 和 K_0 为零阶贝塞尔函数。

在液膜空心涡的中心轴线上由于对称性, 径向速度为零, 无穷远处周围空气静止。于是, 对于1、2区有如下边界条件:

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \infty \quad (5)$$

$$\text{得: } B_1 = 0, \quad A_2 = 0 \quad (6)$$

于是, 式(6)变为:

$$\left. \begin{aligned} G_1(r) &= A_1 I_0(kr) \\ G_0(r) &= A_0 I_0(kr) + B_0 K_0(kr) \\ G_2(r) &= B_2 K_2(kr) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在气液交界面上, 气液间没有质量交换, 即气液间净质量流量为零。且气液界面间法向应力连续。这些边界条件写成数学表达式, 并利用伯努利 (Bernoulli) 方程有:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} &= 0 \\ r &= a \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + V \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} &= 0 \\ r &= a + h \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

$$\rho_g \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = \sigma \left[\frac{\partial^2 \eta_l}{\partial x^2} + \frac{\eta_l}{a^2} \right] \quad r = a \quad (9a)$$

$$\rho_l \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + V \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] - \rho_g \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sigma \left[\frac{\partial^2 \eta_g}{\partial x^2} + \frac{\eta_g}{a^2} \right] \quad r = a + h \quad (9b)$$

其中: $\bar{a} = a / \cos(\beta)$, ρ_l 和 ρ_g 分别为液体和气体的密度。

代入式(1)、(3)、(7), 消去 $A_0, A_1, B_0, B_2, \eta_{l,0}$ 和 $\eta_{g,0}$ 得:

$$\begin{aligned} & \bar{\omega}^4 \left[\rho_l^2 (CD - EF) + \frac{\rho_l \rho_g}{k} (CN + DM) + \frac{\rho_g^2}{k^2} MN \right] - \\ & \bar{\omega}^3 [4kV \rho_l^2 (CD - EF) + 2V \rho_l \rho_g (CN + DM)] + \\ & \bar{\omega}^2 \left[6k^2 V^2 \rho_l^2 (CD - EF) + kV^2 \rho_l \rho_g (CN + DM) + \rho_l \sigma (C + D) \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right) + \right. \\ & \left. \frac{\rho_g \sigma}{k} (M + N) \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right) \right] - \bar{\omega} \left[4k^3 V^3 \rho_l^2 (CD - EF) + 2kV \rho_l \sigma (C + D) \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right) \right] + \\ & k^4 V^4 \rho_l^2 (CD - EF) + k^2 V^2 \rho_l \sigma (C + D) \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right) + \sigma^2 \left(\frac{1}{a^2} - k^2 \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{I_0(ka) K_1[k(a+h)] + I_1[k(a+h)] K_0(ka)}{\Lambda} \\ D &= \frac{I_0[k(a+h)] K_1(ka) + I_1(ka) K_0[k(a+h)]}{\Lambda} \\ E &= \frac{I_0(ka) K_1(ka) + I_1(ka) K_0(ka)}{\Lambda} = \frac{1}{ka} \frac{1}{\Lambda} \\ F &= \frac{I_0[k(a+h)] K_1[k(a+h)] + I_1[k(a+h)] K_0[k(a+h)]}{\Lambda} = \frac{1}{k(a+h)} \frac{1}{\Lambda} \\ \Lambda &= k \{ I_1[k(a+h)] K_1(ka) - I_1(ka) K_1[k(a+h)] \} \\ M &= \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} \\ N &= \frac{K_0[k(a+h)]}{K_1[k(a+h)]} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(10)为仅考虑锥形液膜在液面曲率半径变化的色散方程, 本文中作为锥形液膜色散方程的基本形式。

1.2 锥形液膜形状变化关系式

对扰动波稳定性的分析就是要获得复数增长率 $\bar{\omega}$ 随波数 k 的变化规律, 从而求得最大增长率。对环形液膜来说, 其中心半径 a 和厚度 h 均为常量, 式(10)只是 $\bar{\omega}$ 和 k 的方程, 上述要求很容易满足。而对于锥形液膜情况就要复杂得多, 因为锥形液膜的中心半径 a 和厚度 h 沿程变化, 这样式(10)中便存在4个变量。为此, 必须补充新的关系式。下面推导 a, h 和 k 之间的关系式。

由液膜的质量守恒可以得到中心半径 a 和厚度 h 之间的关系:

$$ah = a_0 h_0 \quad (12)$$

其中, a_0 和 h_0 为液膜的初始中心半径和厚度。

同时, 如果忽略液膜起始段的锥角变化, 则由锥形液膜的几何关系可知中心半径 a 同液膜长度 s 成比例:

$$\frac{a - a_0}{s} = \sin(\beta) \quad (13)$$

为简便起见, 这里假设液膜长度 s 同扰动波长 λ 成线性关系——更精确的关系可通过试验获得。即:

$$s = C\lambda \quad (14)$$

其中, C 为与液体属性、喷嘴结构以及喷雾压力相关的比例常数, 具体数值由实验确定。

由式(12)、(13)、(14), 再利用 $\lambda = 2\pi/k$, 可得:

$$a = \omega + C \frac{2\pi}{k} \sin(\beta)$$

(15a)

$$h = \frac{a_0 h_0}{a_0 + C(2\pi/k) \sin(\beta)}$$

(15b)

式(15)为锥形液膜的形状变化关系式。将式(15)代入式(10), 式(10)便化为 $\bar{\omega}$ 和 k 的方程, 此即为锥形液膜的色散方程。

2 分析和讨论

对于环形液膜, 则半锥角 β 为零。将 $\beta=0$ 的条件代入式(10), 式(10)即变为 Crapper^[3]等人推导的环形液膜色散方程。对于平面液膜, 中心半径为无穷大。进一步令 $a=\infty$, 则方程可因式分解为两部分, 即为 Squire^[1]得出的平面液膜对称和反对称扰动波方程:

$$\left\{ \frac{\rho_l}{k} (Vk - \bar{\omega})^2 \coth\left(\frac{kh}{2}\right) + \frac{\rho_k \bar{\omega}^2}{k} - \sigma k^2 \right. \\ \left. \frac{\rho_l}{k} (Vk - \bar{\omega})^2 \tanh\left(\frac{kh}{2}\right) + \frac{\rho_k \bar{\omega}^2}{k} - \sigma k^2 \right\} \quad (16)$$

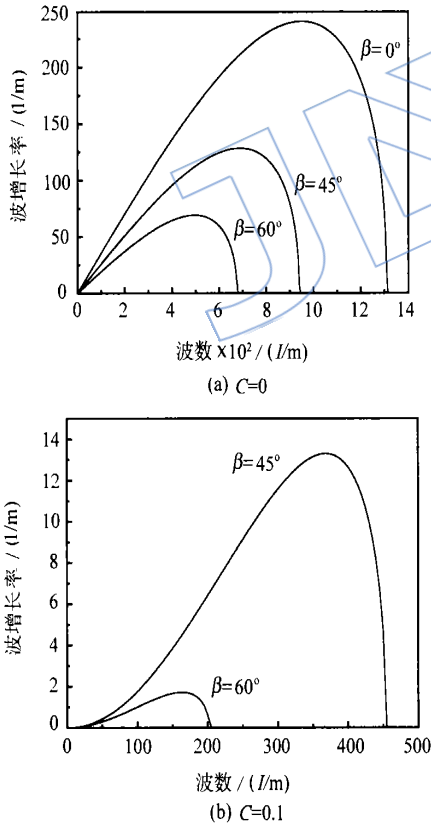


图2 对称扰动波的增长率

Fig. 2 Growth rate of axisymmetrical disturbances
 $V = 10 \text{ m/s}, a_0 = 0.8 \text{ mm}, h_0 = 0.2 \text{ mm}$

图2为对称扰动波, 图3为反对称扰动波。从 Crapper 等人^[9]的实验看, C 值在 0.3 以下, 这里取 0.1。(a) 图为中心半径 a 和厚度 h 保持初始值, 仅液膜曲率半径 $\bar{a}$ 受半锥角影响时的结果。(a) 图中 $\beta=0$ 的曲线代表环形液膜的结果。(b) 图为 a, h 和 $\bar{a}$ 同时随半锥角变化的结果。从图中可看出, 对于对称扰动波, 无论是仅考虑液膜曲率半径的变化还是液膜曲率半径和形状的变化同时考虑, 半锥角的增大都使得液膜的不稳定范围和波增长率缩小, 并且将扰动波的主波向长波的方向移动。而对于反对称扰动波情形就要复杂得多。

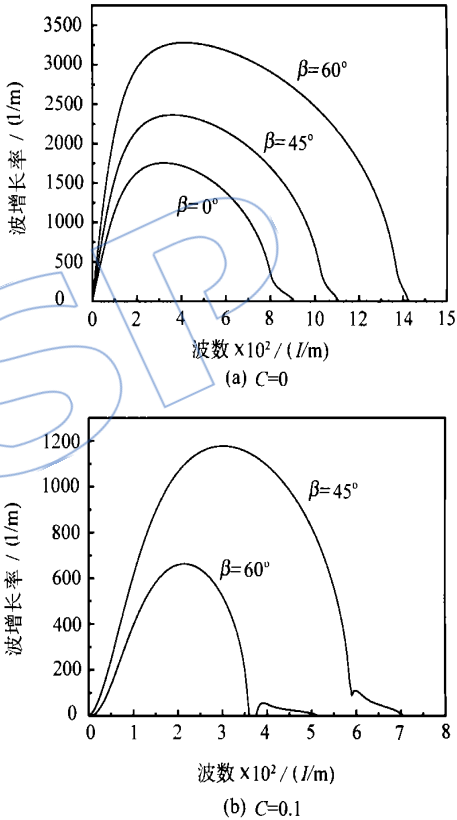


图3 反对称扰动波的增长率

Fig. 3 Growth rate of antisymmetrical disturbances
 $V = 10 \text{ m/s}, a_0 = 0.8 \text{ mm}, h_0 = 0.2 \text{ mm}$

一方面, 反对称扰动波有类似于对称扰动波的变化规律, 即当半锥角增大时, 液膜的不稳定范围和波增长率都减小, 扰动波主波移向长波。另一方面, 反对称扰动波又有其自身的特点。仅考虑液膜曲率半径时, 半锥角的增大使得波增长率的减小趋缓。这主要是因为半锥角的增大扩大了液膜的曲率半径, 从而减弱了表面张力的影响。当同时考虑曲率半径和液膜形状的变化时, 液膜的波增长率出现了两个局部峰值。这两个峰值分别对应

方程(10)数值求解的典型结果如图2、3所示。

长短不同的两个波长, 并且短波的稳定范围和增长率均远小于长波。这说明, 对于锥形液膜, 长波和短波同时存在, 并共同影响液膜的破碎, 且在短波的影响下液膜更易破碎。

3 结 论

(1) 本文对无粘锥形液膜做了空间不稳定性分析, 推导了无粘锥形液膜的色散方程。分析研究了扰动波增长率的变化规律。

(2) 对于对称扰动波, 液膜半锥角的增大使得液膜的不稳定范围和波增长率缩小, 并且将扰动波的主波向长波的方向移动。

(3) 反对称扰动波既有类似于对称扰动波的变化规律, 又有其自身的特点。仅考虑液膜曲率半径时, 半锥角的增大还将使得波增长率的减小趋缓。当同时考虑曲率半径和液膜形状的变化时, 液膜的波增长率出现了两个局部峰值。这两个峰值分别对应长短不同的两个波长, 并且短波的稳定范围和增长率均远小于长波。这说明锥形液膜的破碎同时受到两种长短不同的扰动波影响, 且在短波的影响下液膜更易破碎。

参考文献:

- [1] Squire H B. Investigation of the Instability of a Moving Liquid Film[J]. Brit. J. Appl. Phys, 1953, 4: 167– 169.
- [2] Hagerty W W, Shea J F. A Study of the Stability of Plane Fluid Sheets[J]. J. Appl. Mech. 1955, 22: 509– 514.
- [3] Crapper G D, Dombrowski N, Pyott G A D. Kelvin-Helmholtz Wave Growth on Cylindrical Sheets[J]. J. Fluid Mech, 1975, 68: 497– 502.
- [4] Sterling Arthur M, Sleicher C A. The Instability of Capillary Jets[J]. J. Fluid Mech, 1975, 68: 477– 495.
- [5] Frankel I, Weihs D. Influence of Viscosity on the Capillary Instability of a Stretching Jet[J]. J. Fluid Mech, 1987, 185: 361– 383.
- [6] Rangle R H, Sirignano W A. The Linear and Nonlinear Shear Instability of a Fluid Sheet[J]. Phys. Fluids, 1991, A 3(10): 2392– 2400.
- [7] Li Xiaoguo, Tankin R S. On the Temporal Instability of a Two-Dimensional Viscous Liquid Sheet[J]. J. Fluid Mech. 1991, 220: 425– 443.
- [8] Lefebvre A H. Atomization and Sprays[M]. Hemisphere, 1989.
- [9] Crapper G D, Dombrowski N, Jepson W P, et al. A Note on the Growth of Kelvin-Helmholtz Waves on Thin Liquid Sheets[J]. J. Fluid Mech., 1973, 57, Part 4: 671– 672.